AXIOMATIQUE DE L'UNIVERS LOGIQUE
DES NOMBRES REELS

I) AXIOMES DE NUMÉRICITÉ

I.1) AXIOME DE L'IDENTITE

Tout nombre réel est identique à lui-même, et il existe un et un seul nombre réel identique à un nombre réel donné.

$\forall \mathbb{R}.\mathbf{x}\ ((\mathbf{x} = \mathbf{x}) \wedge (\exists!\ \mathbb{R}.\mathbf{y}\ (\mathbf{y} = \mathbf{x}))$

I.2) AXIOME DE L'ORDRE

Il existe une relation d'ordre totale, conventionnellement notée **≤**, sur ℝ.

$\forall\ \mathbb{R}^2.\ (\mathbf{x}, \mathbf{y})\ ((\mathbf{x} \leq \mathbf{y}) \vee\ (\mathbf{x} \leq \mathbf{y}))$ L'ordre est total

$\forall\ \mathbb{R}^2.\ (\mathbf{x}, \mathbf{y})\ (((\mathbf{x} \leq \mathbf{y}) \wedge\ (\mathbf{x} \leq \mathbf{y})) \Leftrightarrow (\mathbf{x} = \mathbf{y}))$ *antisymétrie : la réflexivité* ***x ≤ x*** *se déduit de cette propriété.*

$\forall\ \mathbb{R}^3.\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\ (((\mathbf{x} \leq \mathbf{y}) \wedge\ (\mathbf{y} \leq \mathbf{z})) \Rightarrow (\mathbf{x} \leq \mathbf{z}))$ *transitivité.*

II) AXIOME D'EXISTENCE :

Il existe **2** nombres réels distincts, notés conventionnellement de manière arbitraire **-1{.}** et **1{.}** qui sont ordonnés dans cet ordre.par la relation ≤.

$(\mathbb{R} \leftrightarrow -1)\ \wedge (\mathbb{R} \leftrightarrow 1) \wedge (-1 \neq 1) \wedge (-1 \leq \mathbf{1})$

«ℝ ↔ x » se lit de manière simple : **« x est un réel »**, ou de façon compliquée : « **x procède de ℝ et le précède »**

La relation ↔ est dite relation de symbiose logique (~ précession-procession croisée de deux discours) Si en l'absence de la définition de ℝ, **-1** et **1** ne sont pas définis, tout au moins en tant que réels, en sens inverse ℝ ne peut pas être défini s'il on en exclu ces deux nombres.

La sous relation → est la relation de précession (**a → b : a** précède **b**) et
La sous relation ← est la relation de procession (**a ← b : a** procède de **b)**

Le choix de vocabulaire en ce domaine étant à l'avenant : « **a** précède **b** » et « **b** procède de **a** » sont deux propositions équivalentes, et on peut par ailleurs dire « a {co}engendre **b**» ou « **b** est {co}engendré par **a** »

Note : L'engendrement n'étant pas nécessairement un processus linéaire, une proposition peut être engendrée par plusieurs propositions.

III) AXIOME D'EXTENSION :

Il existe une règle de production sémantique des nombres réels nommée SOMMATION, notée **S**, qui à tout couple de nombres réels **x**, **y** fait correspondre un nombre réel noté **S (x, y)**

$\forall \mathbb{R}.(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ (\exists\ \mathbb{R}.\mathbf{z}\ \ (\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ \rightarrow \mathbf{z}))$ ***Sous-axiome d'engendrement des réels par sommation***

(S(x, y) → z, se lit S(x, y) engendre z).

Cette règle de production dispose des propriétés suivantes :

1) S est liée à l'identité par l'expression :

$\forall \mathbb{R}.\mathbf{x}\ (\forall \mathbb{R}^2.(\mathbf{y}, \mathbf{z})\ (\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{z})) \Leftrightarrow (\mathbf{y} = \mathbf{z})))$ ***Sous-axiome d'identification des termes de la sommation***

2) S est liée à la relation d'ordre par l'expression :

$\forall \mathbb{R}.\mathbf{x}\ (\forall \mathbb{R}^2.(\mathbf{y}, \mathbf{z})\ (\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq\ \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{z})) \Leftrightarrow (\mathbf{y} \leq\ \mathbf{z})))$ ***Sous-axiome de conservation de l'ordre***

3.) Le réel noté **0** obtenu par sommation de **-1** et **+1** est improductif vis-à-vis de la sommation : ***Sous-axiome du zéro :***

$\mathbf{S}\ (\mathbf{-1}, \mathbf{1}) \rightarrow \mathbf{0}) \wedge\ \forall\ \mathbb{R}.\mathbf{x}\ (\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbf{x}))$

4) Il existe sur $\mathbb{R}$ une loi de composition interne notée **+**, liée à la sommation par l'identité : $\mathbf{S(x, y) \rightarrow x + y}$ qui est telle que **($\mathbb{R}$, +)** **c**onstitue un groupe abélien dont l'élément neutre est **0**. L'élément symétrique par rapport à cette loi de tout réel **x** est noté **-x**.

AXIOME DE COMPLÉTUDE (AXIOME DE DICHOTOMIE) :

Tout couple de nombres réels **(x, y)** dispose d'une moyenne **μ (x, y)** qui est un nombre réel, que l'on peut définir par l'expression suivante :

$$\forall\ \mathbb{R}^2 .(x, y)\ (\exists\ \mathbb{R}.\sigma\ (((S(x, \sigma) \rightarrow \mu(x, y))\ \wedge\ (S(\mu(x, y), \sigma) \rightarrow y)))$$

Si **σ** ≥ 0, **σ** écart type de **x** et **y** relativement à la moyenne **μ**, sinon écart type : **-σ**.

NOTA BENE :

Il n'y a pas contradiction avec le sujet précédent : ici, il ne s'agit plus de définir une bijection entre ℕ et ℝ, mais uniquement de faire état du fait qu'on peut atteindre tout réel par le biais de suites numériques convergentes judicieusement choisies, et comme on dispose désormais non pas d'une mais de deux règles se productions des réels, les génies du genre, trouveront sans nul doute des « accélérateurs de convergence » vers une valeur de leur choix.

AXIOMATIQUE DE L'UNIVERS LOGIQUE DES NOMBRES ENTIERS RELATIFS

REPRENDRE L'AXIOMATIQUE PRÉCÉDENTE

REMPLACER LE SUBSTANTIF « RÉEL » PAR « ENTIER RELATIF »

REMPLACER LE SYMBOLE < ℝ > PAR LE SYMBOLE < ℤ>

SUPPRIMER L'AXIOME DE COMPLÉTUDE

ET LE TOUR EST JOUÉ